Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos

Agenor Gonçalves Neto [a]

São Paulo, 2020

[a] Orientado pelo Prof. Salvador Addas Zanata (IME-USP).

Sumário

Definição

Um sistema dinâmico é função $f : X \to X$, onde X é um espaço métrico.

Para cada $x \in X$, queremos estudar as propriedades da sequência

$$f^0(x) = x, \; f^1(x) = f(x), \; f^2(x) = f(f(x)), \; f^3(x) = f(f(f(x))), \; \ldots.$$

Conceitos Elementares

Definição

Se $x \in X$, então $\{f^k(x) : k \geq 0\}$ é a órbita de x.

Definição

Seja $p \in X$.

i. Se $f(p) = p$, então p é um ponto fixo.
ii. Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$, então p é um ponto periódico de período n.
iii. Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$ e $f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então p é um ponto periódico de período primo n.

O conjunto dos pontos periódicos será denotado por $\mathrm{Per}(f)$ e o conjunto dos pontos periódicos de período primo n será denotado por $\mathrm{Per}_n(f)$.

Definição

Se p é um ponto periódico de período n, então $\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p\}$ é a bacia de atração de p. Além disso, $\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k\to\infty} |f^k(x)| = \infty\}$ é a bacia de atração do infinito.

Definição

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e p um ponto periódico de período n. Se $|Df^n(p)| < 1$, dizemos que p é um ponto atrator. Além disso, dizemos que uma órbita é atratora se ela contém um ponto atrator.

Teorema

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Se p um ponto atrator, então existe uma vizinhança de p contida na bacia de atração de p.

Sumário

Família Quadrática

Considere a família de funções $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$h(x) = \mu x(1 - x),$$

onde $\mu > 1$. Essa família de funções é conhecida por família quadrática.

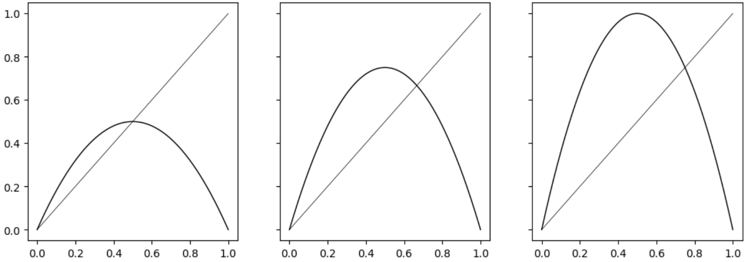

Figura 1: Gráficos de h para $\mu = 2$, $\mu = 3$ e $\mu = 4$.

Sumário

Família Quadrática: Estudo Inicial

Proposição

Se $\mu > 1$, *então* $h(0) = 0$ *e* $h(p_\mu) = p_\mu$, *onde* $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Proposição

Se $\mu > 1$, *então* $\lim_{k\to\infty} h^k(x) = -\infty$ *para todo* $x \notin [0,1]$.

Proposição

Se $1 < \mu < 3$, *então* $\lim_{k\to\infty} h^k(x) = p_\mu$ *para todo* $x \in (0,1)$.

Desse modo, se $1 < \mu < 3$, então

$$\mathcal{B}(0) = \{0,1\}, \quad \mathcal{B}(p_\mu) = (0,1) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(\infty) = (-\infty,0) \cup (1,\infty).$$

Sumário

Se $\mu > 4$, então existem pontos em $[0,1]$ cujas órbitas não estão contidas em $[0,1]$. Portanto, seja

$$\Lambda_n = \{x \in [0,1] : h^n(x) \in [0,1]\}$$

para cada $n \geq 1$. Definindo

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n,$$

podemos restringir o estudo da dinâmica de h em Λ.

Família Quadrática: Conjuntos de Cantor

Proposição

Se $\mu > 4$, então

1. Λ_n *é a união de* 2^n *intervalos fechados disjuntos.*
2. $h^n : [a,b] \to [0,1]$ *é bijetora, onde* $[a,b]$ *é um dos intervalos que formam* Λ_n.

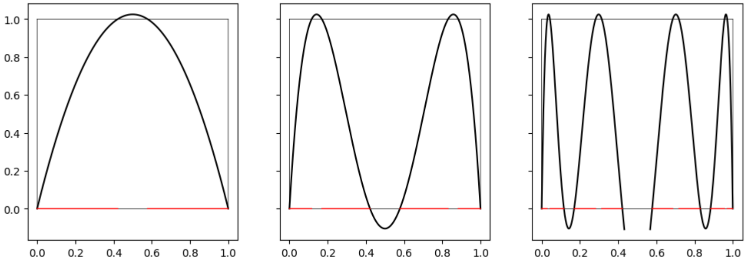

Figura 2: Gráficos de h, h^2 e h^3 para $\mu = 4.1$.

Família Quadrática: Conjuntos de Cantor

Para facilitar as demonstrações, consideramos $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Lema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então existe $\nu > 1$ tal que

1. $|Dh(\Lambda_1)| > \nu$,
2. $b - a < \frac{1}{\nu^n}$, *onde* $[a, b]$ *é um dos intervalos que formam* Λ_n.

Teorema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.

Observação

Esse teorema é válido para $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais complicada.

Sumário

Definição

Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é topologicamente transitiva se dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ e $k \geq 0$ tais que $|x - z| < \varepsilon$ e $|y - f^k(z)| < \varepsilon$.

Proposição

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ é topologicamente transitiva.

Família Quadrática: Caos

Definição

Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f depende sensivelmente das condições iniciais se existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $k \geq 0$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Proposição

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.

Família Quadrática: Caos

Definição

Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é caótica se as seguintes condições são válidas:

i. $\mathrm{Per}(f)$ é denso em X.

ii. f é topologicamente transitiva.

iii. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema

Seja $f : X \to X$ é uma função contínua, onde X é um conjunto infinito. Se $\mathrm{Per}(f)$ é denso em X e f é topologicamente transitiva, então f é caótica.

Família Quadrática: Caos

Teorema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$*, então* $h|_\Lambda$ *é caótica.*

Observação

Esse teorema é válido para $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais complicada.

Sumário

Família Quadrática: Conjugação Topológica

Definição

Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas por τ se as seguintes condições são válidas:

i. τ é um homeomorfismo.

ii. $\tau \circ f = g \circ \tau$.

$$
\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"] & f(x) \in X \arrow[d, "\tau"] \\
\tau(x) \in Y \arrow[r, "g"] & \tau(f(x)) = g(\tau(x)) \in Y
\end{tikzcd}
$$

Família Quadrática: Conjugação Topológica

Proposição

Sejam $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ funções. Se f e g são topologicamente conjugadas, então

1. $\mathrm{Per}(f)$ *é denso em* X *se, e somente se,* $\mathrm{Per}(g)$ *é denso em* Y.
2. f *é topologicamente transitiva se, e somente se,* g *é topologicamente transitiva.*

Família Quadrática: Conjugação Topológica

Lema

A função $T : [0,1] \to [0,1]$ *dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

é caótica.

Teorema

Se $\mu = 4$*, então* h *e* T *são topologicamente conjugadas.*

Corolário

Se $\mu = 4$*, então* h *é caótica.*

Sumário

Definição

Seja f_λ uma família parametrizada de funções no parâmetro λ. Dizemos que essa família sofre uma bifurcação em λ_0 se existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade:
se $\lambda_1 \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ e $\lambda_2 \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$, então f_{λ_1} e f_{λ_2} não são topologicamente conjugadas.

Família Quadrática: Bifurcação

Exemplo

A família E_λ de funções dadas por $E_\lambda(x) = e^{x+\lambda}$ sofre uma bifurcação em $\lambda_0 = -1$.

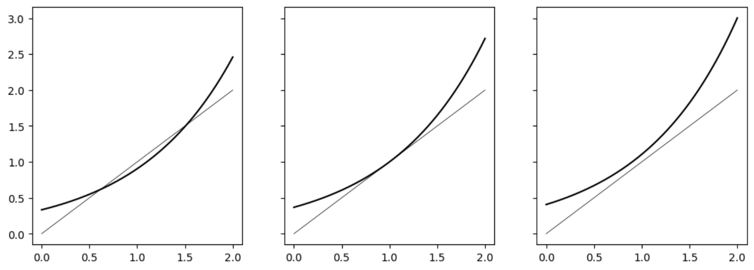

Figura 3: Gráficos de E_λ numa vizinhança de 1 para $\lambda = -1.1$, $\lambda = -1$ e $\lambda = -0.9$.

Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação tangente.

Família Quadrática: Bifurcação

Exemplo

A família quadrática sofre uma bifurcação em $\mu_0 = 3$.

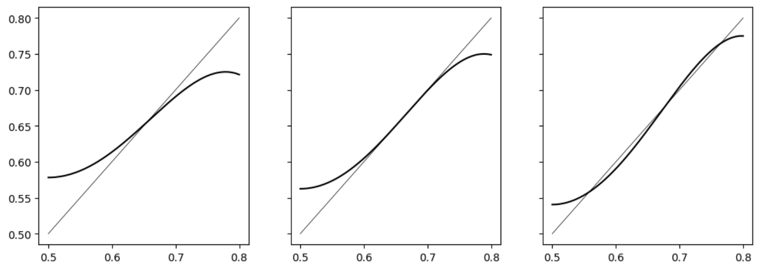

Figura 4: Gráficos de h^2 numa vizinhança de p_μ para $\mu = 2.9$, $\mu = 3$ e $\mu = 3.1$.

Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação com duplicação de período.

Sumário

Teorema de Sharkovsky

Definição (Ordenação de Sharkovsky)

$3 \triangleright 5 \triangleright \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \cdots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$

Teorema (Sharkovsky)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$, então $\mathrm{Per}_m(f) \neq \emptyset$ para todo $n \triangleright m$.

Teorema

Se $n \geq 1$, então existe uma função f com as seguintes propriedades:

1. $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$.
2. $\mathrm{Per}_m(f) = \emptyset$ *para todo* $m \triangleright n$.

Sumário

Teorema de Singer

Definição (Derivada de Schwarz)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^3$. A derivada de Schwarz de f é a função $\mathcal{S}f : \mathbb{R} \backslash C_f \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{D^3 f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{D^2 f(x)}{Df(x)}\right)^2,$$

onde $C_f = \{x \in \mathbb{R} : Df(x) = 0\}$.

Estamos interessados em funções que possuem a derivada de Schwarz negativa.

Exemplo

Se $\mu > 1$, então $Sh(x) = -6(1-2x)^{-2} < 0$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$.

Teorema de Singer

Teorema (Singer)

Se $\mathcal{S}f < 0$ *e* f *possui* n *pontos críticos, então* f *possui no máximo* $n + 2$ *órbitas periódicas atratoras.*

Corolário

Se $\mu > 1$*, então* h *possui no máximo* 1 *órbita periódica atratora.*

Referências

Burns, K. e Hasselblatt, B. (2011).
The Sharkovsky Theorem: a Natural Direct Proof.
The American Mathematical Monthly, 118(3):229–244.

Devaney, R. L. (1989).
An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.
Perseus Books.

Holmgren, R. A. (1996).
A First Course in Discrete Dynamical Systems.
Springer-Verlag New York.